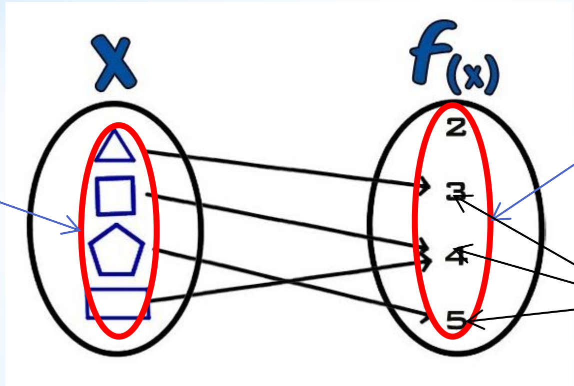
Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

F U N C I O N E S

Reconocer funciones en diversos contextos e identificar sus elementos.

- Una función es una regla que asocia a cada elemento x de un conjunto A, llamado preimagen, un único elemento $f(x)$ de un conjunto B, llamado imagen.
- En la expresión $y = f(x)$, y depende siempre de x, por esta razón a la variable x se le denomina variable independiente y a la variable y se le llama variable dependiente.
- El **dominio** de una función es el conjunto de elementos para los cuales la función está definida. Si $f: A \rightarrow B$, se tiene que A (conjunto de partida) es el dominio y se simboliza: $Dom\, f = A$, mientras que B (conjunto de llegada) es el **codominio**.
- El **recorrido** de una función está formado por todos los elementos del codominio que son la imagen de al menos un elemento del dominio. El recorrido de f es un subconjunto de B y se simboliza: $Rec\, f$.

Dominio de f



Codominio de f

Recorrido de f

#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus

Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

- Una función se puede representar de diferentes maneras:
  - Describiendo la función por medio de palabras. Así, en la expresión "a cada número real se le asigna su doble", se establece $f: A \rightarrow B$, donde A es el conjunto $\mathbb{R}$, y B es el conjunto cuyos elementos son los números que cumplen la condición de ser el doble de cada elemento de A.
  - Por medio de una expresión algebraica que relaciona las variables. Por ejemplo, $f(x) = 2x$.
  - En un diagrama sagital, uniendo con una flecha cada elemento del dominio con su imagen.
  - Usando una tabla de valores, en la que se asignan algunos valores para la variables independientes en la primera fila o columna, y se escriben sus respectivas imágenes en la segunda.
  - Representando gráficamente en el plano cartesiano los pares ordenados (x, y) que cumplen $y = f(x)$.

Diagrama Sagital

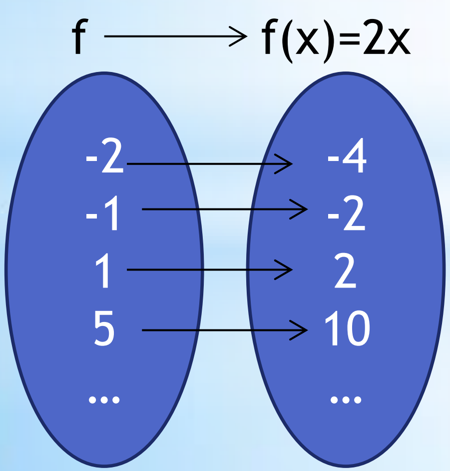
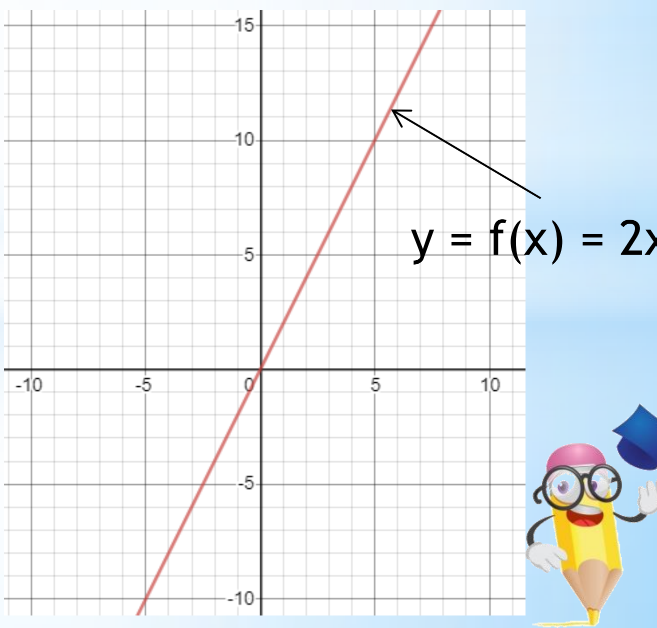


Tabla de Valores

f	f(x)=2x
-1	-2
3	6
7	14
8	16
...	...

Representación Gráfica

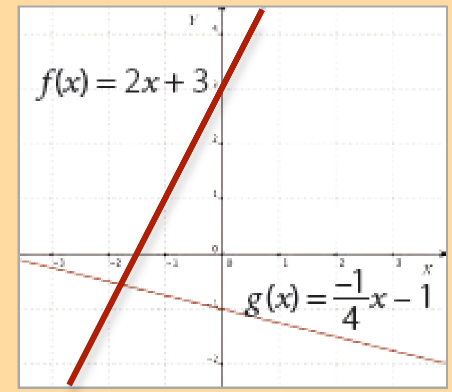


#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus

Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

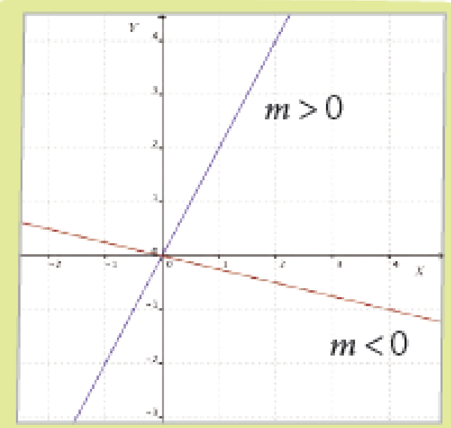
Función Afín

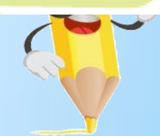
- Una **función afín** es una función de la forma $f(x) = mx + n$, donde m y n son números reales distintos de 0.
- La gráfica de una función afín es una recta cuya pendiente es m y cuyo punto de intersección con el eje Y es $(0, n)$. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = 2x + 3$, representada en la figura de la derecha, tiene pendiente igual a 2 e interseca al eje Y en el punto $(0, 3)$.
- Al igual que en una función lineal, el dominio y el recorrido de la función afín es el conjunto de todos los números reales.



Función Lineal

- Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = mx$, donde m es un número real distinto de 0.
- La gráfica de una función lineal es una recta que pasa por el origen $(0, 0)$. El grado de inclinación de la recta es la **pendiente** y se representa con la letra m en la función $f(x) = mx$. Por ejemplo, en la figura de la derecha, $f(x) = 2x$, tiene $m > 0$, mientras que $g(x) = -\frac{1}{4}x$, tiene $m < 0$.
- Tanto el dominio como el recorrido de la función lineal es el conjunto de todos los números reales.

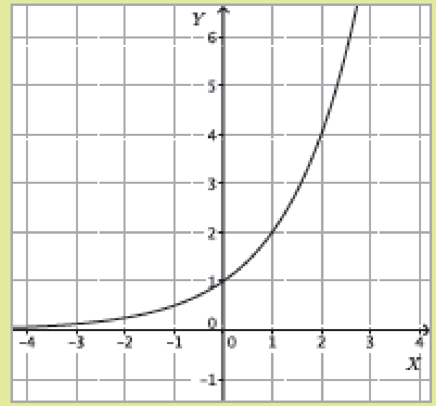




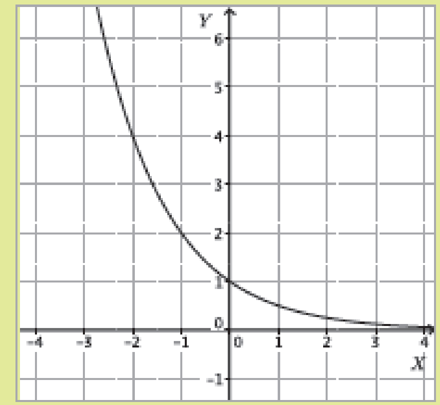
#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus

Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

- Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = k \cdot a^x$, donde $a, k \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $k \neq 0$.
- El dominio de una función exponencial es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El recorrido lo constituye el conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$.
- La orientación de la gráfica de f depende del valor de a, tal como se muestra en la figura de la derecha. No interseca al eje X, su asíntota es $y = 0$.

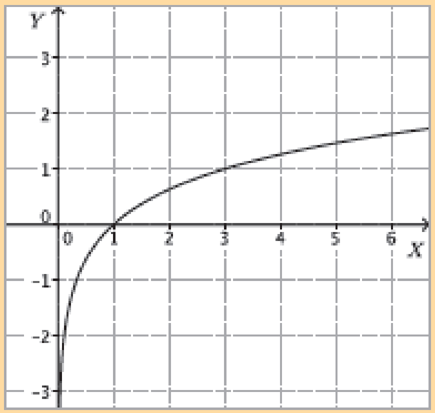


$f(x) = a^x$, con $a > 1$

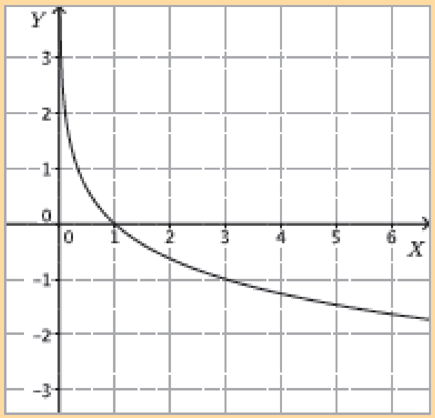


$f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$

- Una **función logarítmica** es una función de la forma $f(x) = log_b\, x$, donde b es un número real positivo diferente de 1.
- El dominio de una función logarítmica es $\mathbb{R}^+$, mientras que su recorrido es $\mathbb{R}$.
- La gráfica de la función logarítmica interseca al eje X en el punto (1, 0). No interseca al eje Y, su asíntota es $x = 0$. Su orientación depende del valor de b, tal como se muestra en la figura de la derecha.



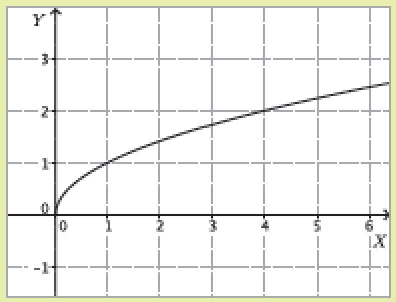
$f(x) = log_b\, x$, con $b > 1$



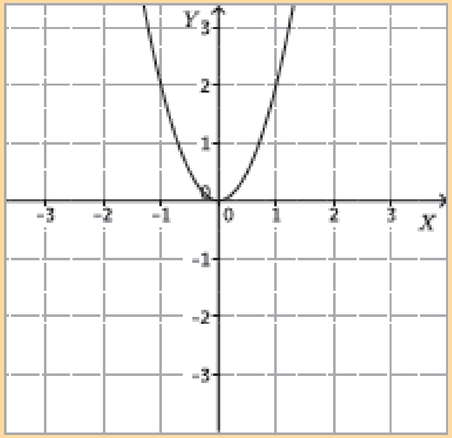
$f(x) = log_b\, x$, con $0 < b < 1$

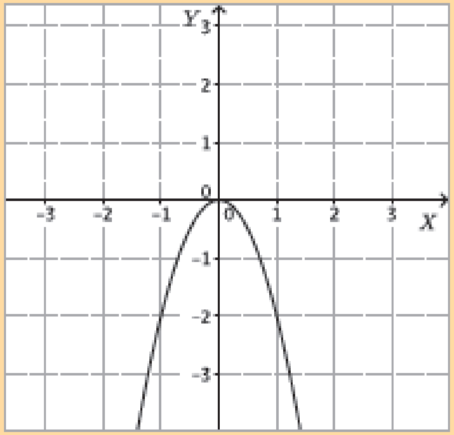
Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

- Llamamos **función raíz cuadrada** a la función del tipo $f(x) = \sqrt{x}$. En la figura de la derecha se muestra la gráfica de esta función.
- Tanto el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ como su recorrido son todos los números reales positivos y el cero.



- Una **función cuadrática** es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y a es distinto de 0.
- La representación gráfica de una función cuadrática es una curva llamada parábola, la cual se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, como se muestran en las figuras inferiores.
- Se pueden combinar desplazamientos verticales y horizontales de modo que la gráfica de la función cuadrática $g(x) = (x - h)^2 + k$ esté desplazada verticalmente en $|k|$ unidades y horizontalmente en $|h|$ unidades, respecto de la gráfica de $f(x) = x^2$. El vértice de la gráfica de g se sitúa en (h, k).





Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

Una **función cuadrática** tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b\ c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Su gráfica corresponde a una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

El vértice de la parábola cuya función es $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede encontrar mediante la expresión:

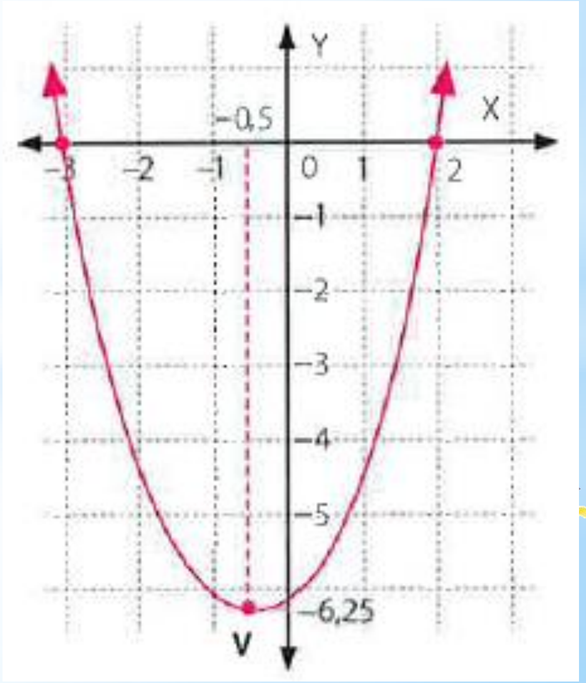
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Además, se tiene que $domf(x) = \mathbb{R}$ y su recorrido está determinado por

$$Si\ \ a > 0, Rec(f) = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right[\qquad Si\ \ a < 0, Rec(f) = \left]-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$$

Ejemplo.
Al graficar la función $h(x) = x^2 + x - 6$, se tiene:

- $a = 1 > 0$,, por lo tanto la parábola abre hacia arriba.
- El vértice viene dado por $V = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ o, en forma equivalente, $V = (-0{,}5\ ;\ -6{,}25)$.
- Los ceros de la función son $x_1 = -3\ y\ x_2 = 2$.
- LA intersección con el eje Y es $h(0) = -6$.
- $Dom(h) = \mathbb{R}$ y $Rec(h) = \left[-\frac{25}{4}\ ;\ +\infty\right[\ o$ $Rec(h) = [-6{,}25\ ;\ +\infty[$



#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus

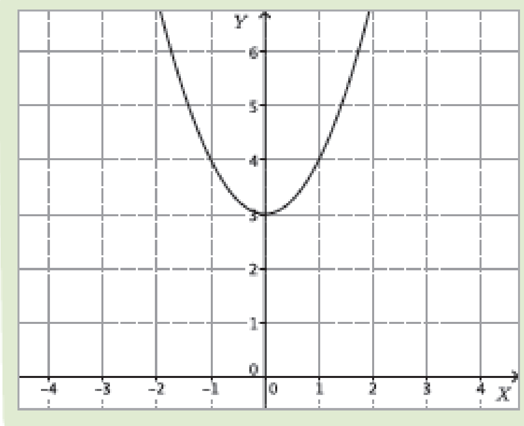
Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

Determina el dominio y el recorrido de la función $f(x) = x^2 + 3$.

f es una función cuadrática con vértice en el punto (0, 3) y cóncava hacia arriba (o bien, convexa), tal como se muestra en la gráfica.

Tenemos que x puede tomar cualquier valor en los números reales. Por lo tanto $dom\, f = \mathbb{R}$.

Por otra parte, observa que en la gráfica los valores que puede tomar y, son solo los números reales mayores o iguales que 3. Por lo tanto: $rec\, f = \{y \in \mathbb{R} \,/\, 3 \leqslant y\}$



$$y = x^2 + 3$$
$$y - 3 = x^2$$
$$x = \sqrt{y - 3}$$

$$y - 3 \geq 0$$
$$y \geq 3$$

Lo que implica que

$$Recf = \{y \in \mathbb{R}/\ y \geq 3\}$$

Para que la raíz tenga un valor Real, la cantidad sub radical $(y - 3)$ debe ser mayor o igual cero

Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$.

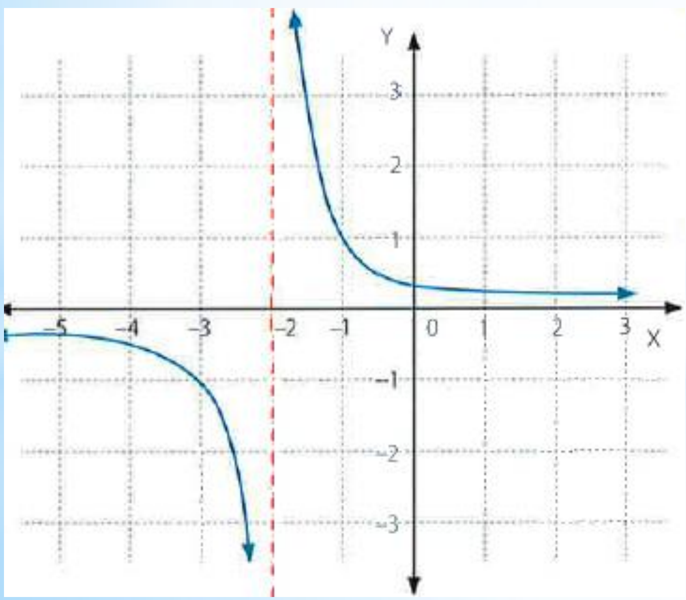
Como la raíz cuadrada de un número sólo está definida cuando la cantidad subradical es un número positivo o cero. Se debe dar que: $x + 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -2$. Es decir:

$$dom\ f = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq -2\}$$

El Recorrido de esta función raíz cuadrada (definida anteriormente) son todos lo Reales Positivos y el cero.

$$rec\ f = \mathbb{R}^{+} + 0$$

El siguiente gráfico que se muestra representa la función $g(x) = \frac{1}{x+2}$. ¿Cuál es el dominio y el recorrido?



La restricción para el dominio es que su denominador sea distinto de cero, lo que se representa en el gráfico con la parte segmentada. Luego, su dominio es:

$$dom\ (g) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

Para el Recorrido se observa que en el eje Y la gráfica no intersecta al eje X, lo que ocurre cuando y = 0. Luego, su recorrido corresponde a:

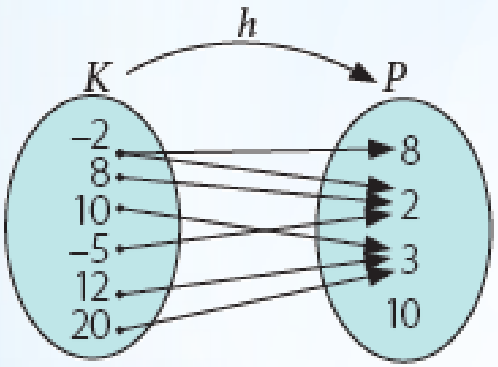
$$rec(g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

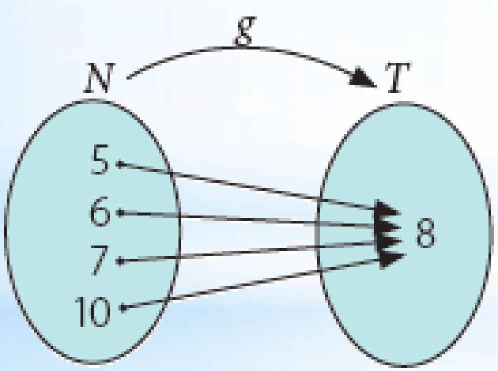
Las Siguientes Actividades Resuélvelas en tu Cuaderno

1. Analiza los siguientes diagramas sagitales y determina aquellos que representan una función, los que no son funciones, indica porqué.

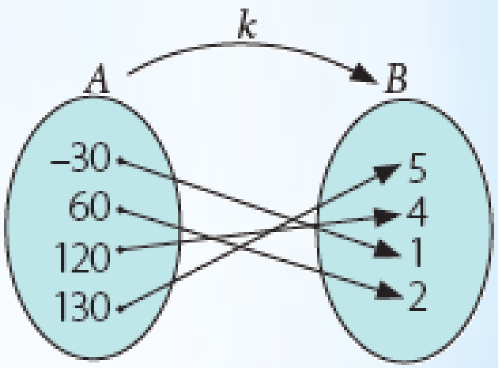
a.



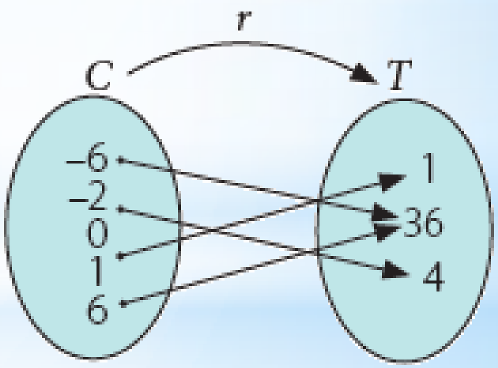
b.



c.



d.

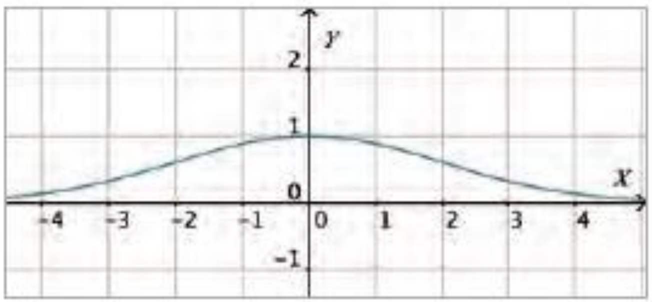


#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus

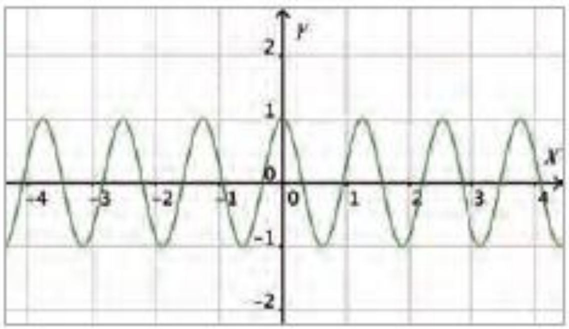
Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

2. Estima el Dominio y el Recorrido de las siguientes funciones.

a.



b.



3. Determina el Dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \frac{3}{x}$ b. $g(x) = \frac{3-x}{x+2}$ c. $h(x) = log(x-8)$ d. $k(x) = \frac{x}{x^2-4}$

4. Construye una tabla de valores para cada función.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$
b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x^2 + 1$
c. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ p(x) = 2 - x$
d. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = \sqrt{x^2}$

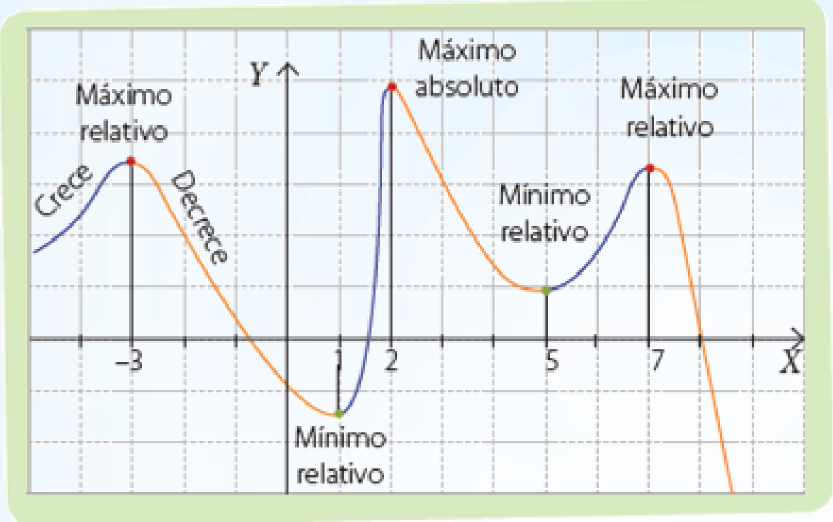
5. Determina el Dominio y el Recorrido de cada función..

a. $h(x) = \frac{x}{x^2-x}$ b. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

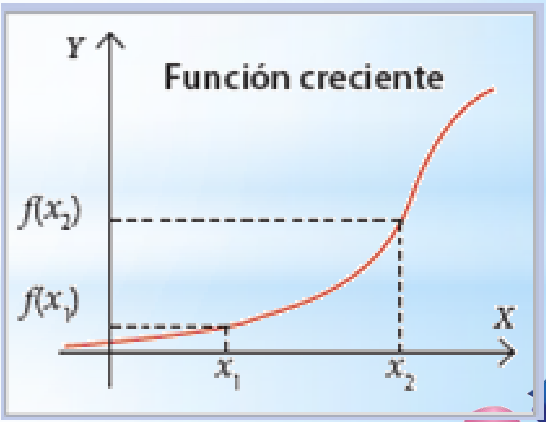
#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus

Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

Analiza la siguiente gráfica de una función



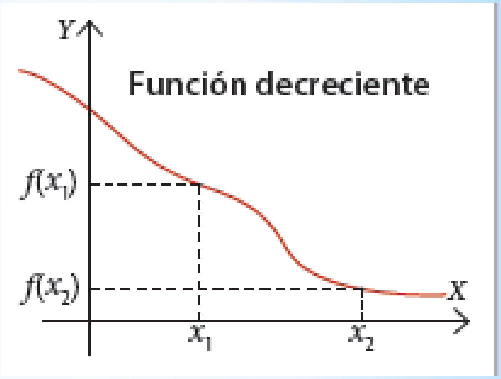
En la gráfica podemos observar que la función “sube” o crece para los valores de x que están en $]-\infty, -3[\;;\;]1\,,2[\;y\,en\;]5\,,7[$. En cambio la función “baja” o decrece para los valores de x que están en $]-3\,,-1[\,;en\;]2\,,5[\;y\;\;en\,]7\,,+\infty[$.
En general una función es creciente si al aumentar los valores de x aumentan los valores de f(x), es decir, si $x_1 c < x_2\;\;entonces\;\;f(x_1) < f(x_2)$.
Gráficamente, se puede interpretar que una función es creciente cuando, al mirarla de izquierda a derecha, la gráfica sube; por ejemplo, la gráfica que se muestra a la derecha.



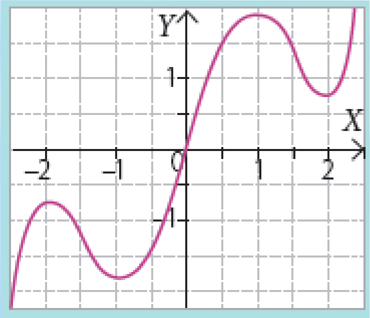
#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus

Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

Por otra parte, una función es decreciente si al aumentar los valores de x disminuyen los valores de f(x), es decir, $si\ x_1 < x_2\ entonces\ f(x_1) > f(x_2)$.
Se puede interpretar que una función es decreciente cuando su gráfica baja. Así, en la gráfica de la función f de la derecha podemos observar que esta baja al mirarla de izquierda a derecha.



En los valores de x en que la función pasa de creciente a decreciente, se dice que hay un máximo relativo, siempre que la función esté definida. De manera similar, cuando la función pasa de decreciente a creciente, se dice que esos valores de x son un mínimo relativo. Y se dice que son máximos o mínimos absolutos cuando f(x) es el mayor o menor valor del recorrido, respectivamente.



Ejemplo 1. A partir de la función cuya gráfica está representada en la figura, determina los valores de x para los cuales la función es creciente y para los cuales es decreciente. También determina los mínimos y máximos relativos.

A partir de la gráfica, podemos observar que entre $x = -2$ y $x = -1$ y entre $x = 1\ y\ x = 2$ la función es creciente. Luego, entre $x = -1$ y $x = 1$ la función es creciente.
Cuando $x = -1\ y\ x = 2$ la función alcanza un mínimo relativo, y cuando $x = -2\ y\ x = 1$ la función alcanza un máximo relativo.

#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus

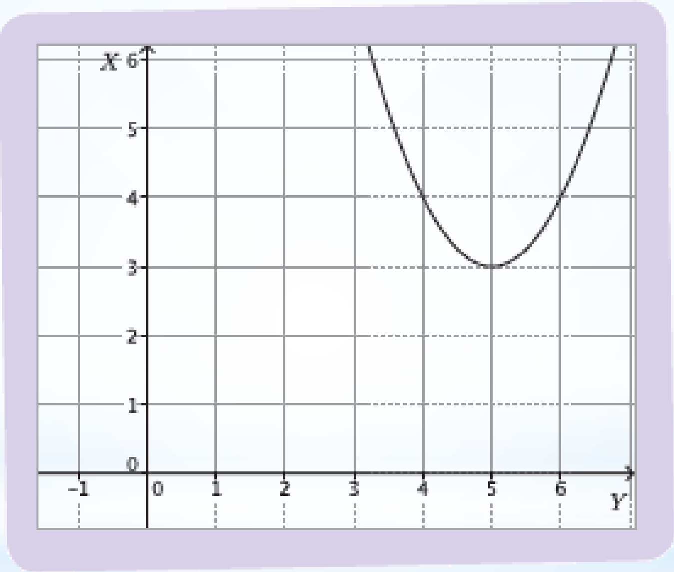
Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

Ejemplo 2

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = (x - 5)^2 + 3$. Determina los valores de x para los cuales la función es creciente y decreciente.

La función $f(x) = (x - 5)^2 + 3$ corresponde a una traslación de 5 unidades hacia la derecha y 3 hacia arriba respecto de la función $f(x) = x^2$.

Luego, la gráfica de la función es la que se muestra a continuación.



El vértice de la parábola es el punto $(5, 3)$. Por lo tanto, la función es decreciente en $]-\infty, 5[$ y la función es creciente en $]5, +\infty[$. En este caso, para $x = 5$ la función alcanza un mínimo absoluto.

Alejandro Susarte Torres
Profesor de Matemática

Ahora, a resolver la guía N°4 de funciones, esta la deberás entregar en la semana desde el 4 al 8 de mayo.

Éxito

#AprendoDesdeCasa ; #LeGanoAlCoronavirus